

Тема 17. Дифференциальные уравнения высших порядков.

§1. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1.1. Уравнение вида $y^n = f(x)$

Уравнение вида $y^n = f(x)$ решается последовательным - кратным интегрированием правой части. При каждом интегрировании имеем одно произвольное постоянное, а в окончательном результате " n " произвольных постоянных.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{1}{x^3}$ и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=2$, $y'(1)=1/2$, $y''(1)=3/2$.

Решение.

I) Последовательно интегрируя данное уравнение, имеем:

$$y'' = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C_1,$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{2x^2} + C_1 \right) dx = \frac{1}{2x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2x} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{2} \ln|x| + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad -$$

общее решение

II) Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. С этой целью найдем значения C_1 , C_2 и C_3 , подставляя

$x = 1, y = 2, y' = \frac{1}{2}, y'' = \frac{3}{2}$ в систему равенств:

$$\begin{cases} y'' = -\frac{1}{2x^2} + C_1, \\ y' = \frac{1}{2x} + C_1 x + C_2, \\ y = \frac{1}{2} \ln|x| + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + C_1, \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_1 + C_2, \\ 2 = \frac{1}{2} \ln 1 + C_1 \frac{1}{2} + C_2 + C_3, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 2, C_2 = -2, C_3 = 3$.

Искомое частное решение получаем, подставляя найденные значения произвольных постоянных в формулу общего решения:

$$y = \frac{1}{2} \ln|x| + 2\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3,$$

или

$$y = \frac{1}{2} \ln|x| + x^2 - 2x + 3$$

1.2. Уравнения вида

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0,$$

не содержащие неизвестную функцию в явном виде

Порядок такого уравнения можно понизить, полагая $y^{(n-1)} = P(x)$. Тогда $y^{(n)} = \frac{dp}{dx}$. В результате получим уравнение первого порядка

$$F(x, P, \frac{dp}{dx}) = 0 \quad \text{относительно неизвестной}$$

функции $P(x)$. Решая его, найдем $p(x)$. Дальнейшее решение сводится к интегрированию уравнения типа рассмотренного выше $y^{(n-1)} = P(x)$.

Пример. Проинтегрировать уравнение $y''' = 2(y'' - 1) \operatorname{ctg} x$

I) Имеем уравнение вида $F(x, y'', y''') = 0$.

Положим $y'' = P(x)$. Тогда $y''' = \frac{dp}{dx}$. Получаем

уравнение первого порядка: $\frac{dp}{dx} = 2(p - 1) \operatorname{ctg} x$. Оно

является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{dp}{p-1} = 2 \int \operatorname{ctg} x dx; \quad \ln|p-1| = 2 \ln|\sin x| + \ln C_1;$$

$$p-1 = C_1 \sin^2 x; \quad p = 1 + C_1 \sin^2 x.$$

II) Вернемся к старой переменной $y'' = 1 + C_1 \sin^2 x$. Выполняя двукратное интегрирование, имеем

$$\begin{aligned} y' &= \int (1 + C_1 \sin^2 x) dx = \int dx + \int C_1 \sin^2 x dx = x + C_1 \int \sin^2 x dx = x + C_1 \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\ &= x + C_1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{4} \sin 2x \right) + C_2 = x \left(1 + \frac{C_1}{2} \right) - \frac{C_1}{4} \sin 2x + C_2 \end{aligned}$$

$$y = \int y' dx = \int \left[x \left(1 + \frac{C_1}{2} \right) - \frac{C_1}{4} \sin 2x + C_2 \right] dx = \frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{C_1}{2} \right) + \frac{C_1}{8} \cos 2x + C_2 x + C_3$$

$$y = \frac{2 + C_1}{4} x^2 + \frac{C_1}{8} \cos 2x + C_2 x + C_3$$

общее решение уравнения.

1.3. Уравнение вида

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad (n > 2)$$

не содержащее аргумент x в явном виде

Уравнения этого вида допускают понижение порядка, если положить $y^{(n-1)} = P$, а за новый

аргумент принять $y^{(n-2)}$. Тогда $y^{(n)} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy^{(n-2)}};$
 $\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = P \frac{dp}{dy^{(n-2)}}.$

В результате получим уравнение первого порядка относительно неизвестной функции P и аргумента $y^{(n-2)}$.

$$F\left(y^{(n-2)}, P, P \cdot \frac{dp}{dy^{(n-2)}}\right) = 0$$

Дальнейшее решение сводится к интегрированию уравнения типа $y^{(n-1)} = P.$

Пример. Найти частное решение уравнения $yy'' - (y')^2 = 0$, если $y(0)=1, y'(0)=2$.

Полагая $y' = p, y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$. Имеем: $yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0,$
 $p\left(y \frac{dp}{dy} - p\right) = 0.$

Приравнявая первый множитель нулю, получим простейшее уравнение $p=0$.

Его решение $y = C. \frac{dy}{dx} = 0.$

Приравниваем к нулю второй множитель:
 $\left(y \frac{dp}{dy} - p\right) = 0, \quad ydp - pdy = 0$ (уравнение с разделяющимися переменными). Разделим

переменные $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$.

Интегрируем: $\ln P = \ln y + \ln C_1$,
 $\ln P = \ln C_1 y$,
 $P = C_1 y$

Вернемся к старой переменной, т.е. вместо Р

подставим $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y ; \quad dy = C_1 y dx \quad (1)$$

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx$$

Интегрируем $\ln y = C_1 x + C_2$.

Отсюда $y = e^{C_1 x + C_2}$ (2)

(общее решение исходного уравнения).

Найдем частное решение, используя начальные условия: $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Подставим $x=0$, $y=1$, $y'=2$ уравнения (1) и (2), получим систему двух уравнений с двумя неизвестными C_1 и C_2 :

Очевидно, что $C_1=2$, а $C_2=0$.

При найденных значениях C_1 и C_2 получим искомое частное решение из общего: $y = e^{2x}$